Épreuve de Maths **Filières : SMA - SMB** **Coefficient : 9** **Durée : 4 heures**	Royaume du Maroc Ministère de l'Education Nationale De la Formation professionnelle de l'Eseignement supérieur & de la Recherche scientifique	**Examen National du** **BACCALAURÉAT** **Session Rattrapage** **Juillet 2006**

■ Exercice Numéro 1 : (02,00 points)

On distribue au hasard quatre boules, indiscernables au toucher et numérotées par les chiffres 1 , 2 , 3 et 4, sur six personnes A, B, C, D, E et F (chaque personne pourrait recevoir zéro ou une ou deux ou trois ou quatre boules).

0,50 **1** Dénombrer les éventualités possibles de cette distribution.

0,50 **2** Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule par A.

1,00 **3** Soit E l'événement : « La somme des nombres portés par les boules obtenues de la part des personnes B et C est égal au nombre porté par la boule acquis par la personne A ».

Calculer la probabilité de cet événement E .

■ Exercice Numéro 2 : (05,00 points)

I Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

Soit l'application f définie de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ par la formule :

$$f(z)=\frac{1}{6}\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2\,\bar{z}\right)$$

0,50 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

0,50 **II** *soient* : $\begin{cases} z_{n+1}=f(z_n) \;;\; \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ z_0=1 \end{cases}$; $u_n=|z_n|$

0,50 **1** **a** Montrer que : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$; $0\leq u_{n+1}\leq\frac{2}{3}u_n$

0,50 **b** En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente puis calculer sa limite.

0,50 **2** On pose : $S_n=\sum_{k=0}^{n}\mathcal{O}M_k=\mathcal{O}M_1+\mathcal{O}M_2+\cdots+\mathcal{O}M_n$; $z_k=aff(M_k)$; $n\,\epsilon\,\mathbb{N}$

0,50 **a** Montrer que : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$; $S_n\leq 3$.

0,50 **b** Montrer que la suite $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

III On pose : $z = r\,e^{i\theta}$; $\theta \in \left]-\pi,\pi\right[$; $r > 0$.

1,00 1 Montrer que : $f(z) = \frac{2}{3}\, r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\, e^{\frac{i\pi}{6}}$

0,50 2 Montrer que les points $\left\{ M_i \;;\; 1 \leq i \leq n \;;\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$ sont colinéaires.

Exercice Numéro 3 : (03,50 points)

I Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit : $(\Gamma) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;;\; 2y^2 - 4y - 7x = 0 \right\}$

0,75 1 Montrer que (Γ) est une parabole puis déterminer ses caractéristiques.

0,25 2 Construire la courbe (Γ) dans le repère $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

II Soit l'équation (E) : $2(y-1)^2 = 7x + 2$; $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$

1 Soit le couple (x,y) une solution de cette équation dans $\mathbb{Z}^2$.

1,00 a Montrer que : *oubien* $y \equiv 0\,[7]$ *oubien* $y \equiv 2\,[7]$.

0,50 b En déduire que les solutions de l'équation (E) s'écrivent sous :

$$(14k^2 - 4k \;;\; 7k) \quad ou \quad (14k^2 + 4k \;;\; 7k + 2) \quad avec \quad k \in \mathbb{Z}$$

1,00 2 Soit : $\mathfrak{B} = \left\{ M(x,y) \in (\Gamma) \;;\; x \wedge y = 9 \;;\; (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

Déterminer explicitement l'ensemble $\mathfrak{B}$.

Exercice Numéro 4 : (03,00 points)

0,25 1 Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R})$; $\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{t}{3+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2}$

0,50 2 Montrer que : $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$; $\int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{3+t^2}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\, Arctan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$

3 Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,\pi]$ par :

$$F(x) = \int_0^{x} \left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right) du$$

0,50 a Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0,\pi]$.

0,50 b Via une intégration par changement de variable montrer que :

$$\forall\, x \in [0,\pi[\quad ; \quad F(x) = 2\int_0^{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}\, dt$$

Rappel : $\sin(u) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ *et* $\cos(u) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ *avec* $t = \tan\left(\dfrac{u}{2}\right)$; $u \in [0,\pi[$

0,75 **c** En utilisant les résultats des questions précédentes, Montrer que :

$$\forall\, x \in [0,\pi[\quad ; \quad F(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\, Arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

0,50 **d** En utilisant la continuité de la fonction F Montrer que :

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right)du = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

■ Exercice Numéro 5 : (06,50 points)

Soit f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad ; \quad n \geq 2$$

Soit $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm$.

0,50 **1 a** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

0,75 **b** Déterminer les deux branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_n)$.

0,75 **2** Calculer $f_n'(x)$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f_n.

0,50 **3 a** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}), (\exists!\ \alpha_n \in \mathbb{R})$: $f_n(\alpha_n) = 0$.

0,25 **b** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $n \geq 2 \implies f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) < 0$

0,75 **c** Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $e^x \geq x+1$.

0,50 **d** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $f_n(1) > 0$ *et* $\dfrac{1}{n} < \alpha_n < 1$

0,50 **4** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_2)$ dans le repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 **5 a** Montrer que : $(\forall\, n \geq 2)$: $f_{n+1}(\alpha_n) = \dfrac{n\, e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n} - \dfrac{1}{n} - 1\right)$

0,50 **b** En déduire que : $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\})$; $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$.

0,75 **c** Montre que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est convergente puis donner sa limite.

0,50 **6 a** Montrer que : $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\})$; $\dfrac{1}{n^2} < e^{-n\,\alpha_n} < \dfrac{1}{n}$

0,50 **b** En déduire que : $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\})$; $\dfrac{\ln n}{n} < \alpha_n < \dfrac{2\ln n}{n}$

0,25 **c** Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{n\infty}(\alpha_n)$